УДК 517.911, 517.968

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. Часть 3

©А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; выпуклость по переключению значений (разложимость).

Рассмотрены вопросы априорной ограниченности решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями и оценки их решений.

В этой части рассматривается задача Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями, сформулированная в части 1

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \ k = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

Здесь предполагается,что правая часть включения (1) является непрерывным по Хаусдорфу многозначным отображением. В этом случае доказано, что если множество всех локальных решений задачи (1)-(3) априорно ограничено, то множество решений задачи (1)-(3) почти реализует (или реализует) расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений (определение см. ниже). На основе этого утверждения получены оценки решений задачи (1)-(3), аналогичные оценкам А.Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что множество решений задачи (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений*, если для любого $v \in \mathbf{L}_1^n[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ задачи (1)-(3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \tag{4}$$

где функция $q \in \Phi(x)$ удовлетворяет равенству (4). Если неравенство (4) выполняется и при $\varepsilon = 0,$ то будем говорить, что множество решений задачи (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

Т е о р е м а 1. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (1)-(3)(см. §1) *априорно ограничено. И пусть отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ *непрерывно по Хаусдорфу. Тогда множество решений задачи* (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega[S(\mathbf{L}_1^n[a, b])],$ *то множество решений задачи* (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$ $k = 1, 2, ..., m,$ *обладают свойством* $\mathcal{A},$ если для каждого $k = 1, 2, ..., m$ найдется непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \le \widetilde{I}_k(|x-y|). \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1, 2, ..., m)$, если импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, и если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, удовлетворяющий условиям $\Gamma(0) = 0$, для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n_1(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \le \|\Gamma(Z(x-y))\|_{\mathbf{L}^1_1(\mathcal{U})}; \tag{6}$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, ...m, \quad y(a) = p \tag{7}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством

$$(Zx)(t) = |x(t)|, \tag{8}$$

отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяют неравенству (5), $u \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, числа $\varepsilon, p \ge 0$.

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что для любого $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{9}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяет равенству (2). Пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}$ справедливо соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}^n_1(\mathcal{U})}[\widetilde{q}; \Phi(y)] \le \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{10}$$

где функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяют равенству (9).

Т е о р е м а 2. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *имеет место представление* (9), *а функция* $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (10). *Далее, пусть импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, *и отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1, 2, ..., m)$, *где* $\varepsilon \ge 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- *начальное условие задачи* (1)-(3). *Тогда для любого решения* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *задачи* (1)-(3), *удовлетворяющего для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *неравенству* (4), *в котором функция* $q \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$ *из представления* (4), *а функция* $v = \widetilde{q}$ *из соотношения* (9), *при любом* $t \in [a,b]$ *имеет место оценка*

$$|x(t) - y(t)| \le \xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t) \tag{11}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \le \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma(\xi(\varkappa, \varepsilon, p)))(t), \tag{12}$$

где $\xi(\varkappa,\varepsilon,p)-$ *верхнее решение задачи* (7) *при* $u=\varkappa$ *и* $p=|x_0-y(a)|$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и пусть $x\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]-$ решение задачи (1)-(3), удовлетворяющее для любого измеримого множества $\mathcal{U}$ неравенству (4), в котором функция $q\in\mathbf{L}_1^n[a,b]$ из представления (4), а функция $v=\widetilde{q}$ из соотношения (9). Поэтому из равенств (4) и (9) для любого $t\in[a,b]$ получаем оценку

$$|x(t)-y(t)|\le|x_0-y(a)|+ \\ +\int\limits_a^t|q(s)-\widetilde{q}(s)|ds+\sum\limits_{k=1}^m\chi_{(t_k,b]}(t)|\Delta(x(t_k)-y(t_k))|. \tag{13}$$

Так как импульсные воздействия $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ k=1,2,...,m,$ обладают свойством $\mathcal{A}$, то из оценок (5) и (13) следует соотношение

$$|x(t)-y(t)|\le|x_0-y(a)|+ \\ +\int\limits_a^t|q(s)-\widetilde{q}(s)|ds+\sum\limits_{k=1}^m\chi_{(t_k,b]}(t)\widetilde{I}_k(|x(t_k)-y(t_k)|) \tag{14}$$

Далее, так как $x\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяет оценке (4), в которой $q\in\Phi(x)$ из представления (4), а функция $v=\widetilde{q}$ из соотношения (9), то из оценок (4), (10) для любого измеримого множества $\mathcal{U}$ имеют место соотношения

$$\|q-\widetilde{q}\|_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}\le\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q};\Phi(x)]+\varepsilon\mu(\mathcal{U})\le\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q};\Phi(y)]+\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi(y);\Phi(x)]+$$

$$+\varepsilon\mu(\mathcal{U})\le\int\limits_{\mathcal{U}}(\varkappa(s)+\varepsilon)ds+\int\limits_{\mathcal{U}}\Gamma(Z(x-y))(s)ds.$$

Таким образом из предыдущих оценок вытекает, что при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|q(t)-\widetilde{q}(t)|\le\varkappa(t)+\varepsilon+\Gamma(Z(x-y))(t). \tag{15}$$

Поэтому из оценок (15) и (14) для любого $t\in[a,b]$ вытекает соотношение

$$|x(t)-y(t)|\le|x_0-y(a)|+\int\limits_a^t(\varkappa(s)+\varepsilon)ds+ \\ +\int\limits_a^t\Gamma(Z(x-y))(s)ds+\sum\limits_{k=1}^m\chi_{(t_k,b]}(t)\widetilde{I}_k(|x(t_k)-y(t_k)|). \tag{16}$$

Определим отображение $\Theta:\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]\to\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$ равенством

$$(\Theta x)(t)=\sup\limits_{s\in[a,t]}x(s). \tag{17}$$

Очевидно, что для любого $t\in[a,b]$ справедлива оценка

$$|x(t)-y(t)|\le(\Theta Z(x-y))(t). \tag{18}$$

Из (18), (16) и изотонности отображений $\Gamma:\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]\to\mathbf{L}_+^1[a,b],\ \ \widetilde{I}_k:\mathbb{R}_+^1\to\mathbb{R}_+^1,\ \ k=1,2,...,m,$ для любого $t\in[a,b]$ следует соотношение

$$|x(t)-y(t)|\le|x_0-y(a)|+\int\limits_a^t(\varkappa(s)+\varepsilon)ds+ \\ +\int\limits_a^t\Gamma(\Theta Z(x-y))(s)ds+\sum\limits_{k=1}^m\chi_{(t_k,b]}(t)\widetilde{I}_k((\Theta Z(x-y))(t_k)). \tag{19}$$

Так как правая часть оценки (19) не убывает по $t \in [a,b]$, то из определения функции $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ (см.(17)) для любого $t \in [a,b]$ получаем оценку

$$(\Theta Z(x-y))(t) \le |x_0 - y(a)| + \int\limits_a^t (\varkappa(s) + \varepsilon + \Gamma(\Theta Z(x-y))(s))ds + \\ + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\widetilde{I}_k((\Theta Z(x-y))(t_k)). \tag{20}$$

Поэтому согласно §2 для любого $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$(\Theta Z(x-y))(t) \le \xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t), \tag{21}$$

где $\xi(\varkappa, \varepsilon, p)-$ верхнее решение задачи (7). Из оценок (21), (20), (18) получаем оценку (11). Из неравенства (15) и соотношения (21) следует неравенство (12). Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 вытекает

Т е о р е м а 3. *Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет место представление* (9) *и функция $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству* (10). *Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1, 2, ..., m)$, *где $\varepsilon \ge 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- начальное условие задачи* (1)-(3), *и множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограниченно. Тогда при $\varepsilon > 0$ существует решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи* (1)-(3), *для которого при всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка* (11), *и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется соотношение* (12).

Если $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[S(\mathbf{L}^n_1[a,b])]$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Далее рассмотрим задачи, для которых можно получить из теоремы 3 конкретные оценки решений.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального включения с импульсными воздействиями

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ при почти всех } t \in [a,b], \tag{22}$$

$$\Delta(x(t_k)) = \widehat{I}_k(x(t_k)), \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{23}$$

$$x(a) = x_0, \tag{24}$$

где для любого $k = 1, 2, ..., m$ отображение $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определено равенством

$$\widehat{I}_k x = A_k x + g_k,$$

здесь $A_k \in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in \mathbb{R}^n$; отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям:
1) при всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо;
2) существует суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$h[F(t,x); F(t,y)] \le l(t)|x-y|; \tag{25}$$

3) функция $\|F(t,0)\| : [a,b] \to [0,\infty)$, определенная равенством

$$\|F(t,0)\| = \sup_{y \in F(t,0)} |y|,$$

суммируемая.

Под решением задачи (22)-(24) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такая суммируемая $q:[a,b] \to \mathbb{R}^n$, что при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо включение $q(t) \in F(t,x(t))$ и при всех $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x(t) = (\Lambda q)(t) + \sum_{k=1}^{m} \Delta(x(t_k)), \tag{26}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1,2,...,m$ удовлетворяют равенству (23), а оператор $\Lambda : \mathbf{L}_1^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ определен равенством (7).

Отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ порождает оператор Немыцкого $N : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный равенством

$$Nx = \{z \in \mathbf{L}_1^n[a,b] : z(t) \in F(t,x(t)) \text{ при почти всех } t \in [a,b]\}. \tag{27}$$

С помощью оператора Немыцкого включение (22) можно записать в следующем эквивалентном функциональном виде

$$\dot{x} \in Nx, \tag{28}$$

где $\dot{x}-$ «производная решения» $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) (функция $q \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ удовлетворяет равенству (26)).

Так как для любого $k = 1,2,...,m,$ выполняется неравенство

$$|\widehat{I}_k x - \widehat{I}_k y| \le \|A_k\||x-y|,$$

то отображение $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1,2,...,m,$ удовлетворяющее оценке (5), имеет вид

$$\widetilde{I}_k x = \|A_k\| x. \tag{29}$$

Импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m,$ и отображение $N : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ обладают свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, \widehat{I}_k, k=1,2,...,m)$ при $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, заданном равенством

$$(\Gamma x)(t) = l(t)x(t). \tag{30}$$

При этом $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет условиям: $\Gamma(0)=0,$ для любых функций $x,y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[Nx;Ny] \le \|\Gamma(Z(x-y))\|_{\mathbf{L}_1^1(\mathcal{U})},$$

здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством (8).

Рассмотрим решение задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1,2,...m, \quad y(a) = p, \tag{31}$$

где числа $\varepsilon, p \ge 0,$ функция $u \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ определено равенством (30). Решение задачи (31) на промежутке $[a,t_1]$ имеет вид

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t) = \int_a^t (u(s)+\varepsilon) e^{\int\limits_s^t l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^t l(s)ds}.$$

Рассмотрим продолжение решения задачи (31) на промежуток $(t_1,t_2]$. Из условия задачи получаем

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t_1+0) = \xi(u,\varepsilon,p)(t_1) + \|A_1\|\xi(u,\varepsilon,p)(t_1).$$

Поэтому решение задачи (31) на отрезке $[a,t_2]$ записывается в виде

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds+(y(t_1)+\|A_1\|y(t_1))e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}$$

или

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t) = \int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^t l(s)ds} + \|A_1\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds + p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_1,b]}(t).$$

Так как

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t_2+0)=\xi(u,\varepsilon,p)(t_2)+\|A_2\|\xi(u,\varepsilon,p)(t_2),$$

то продолжение решения задачи (31) на полуинтервал $(t_2,t_3]$ имеет вид

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^t l(s)ds}+$$
$$+\|A_1\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_1,b]}(t)+$$
$$+\|A_2\|\Big(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$
$$+\|A_1\|\|A_2\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t).$$

На полуинтервал $(t_3,t_4]$

$$\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^t l(s)ds}+$$
$$+\|A_1\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_1,b]}(t)+$$
$$+\|A_2\|\Big(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$
$$+\|A_3\|\Big(\int_a^{t_3}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_3} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_3} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_3}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$
$$+\|A_1\|\|A_2\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$
$$+\|A_1\|\|A_3\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$
$$+\|A_2\|\|A_3\|\Big(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$
$$+\|A_1\|\|A_2\|\|A_3\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\ e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_3,b]}(t).$$

Окончательно получаем формулу

$$
\begin{aligned}
&\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int\limits_a^t(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^t l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^t l(s)ds}+\\
&+\sum_{k=1}^m\|A_k\|\left(\int\limits_a^{t_k}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_k} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_k} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_k}^t l(s)ds}\chi_{(t_k,b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-1}\|A_1\|\|A_{k+1}\|\left(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+\\
&+\sum_{k=2}^{m-2}\|A_2\|\|A_{k+1}\|\left(\int\limits_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_2} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int\limits_a^{t_{m-1}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_{m-1}} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_{m-1}} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_{m-1}}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-2}\|A_1\|\|A_2\|\|A_{k+2}\|\left(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+2},b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-3}\|A_2\|\|A_3\|\|A_{k+3}\|\left(\int\limits_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_2} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+3},b]}(t)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\|A_{m-2}\|\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int\limits_a^{t_{m-2}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_{m-2}} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_{m-2}} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_{m-2}}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\|A_1\|\|A_2\|\ldots\|A_m\|\left(\int\limits_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int\limits_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Пусть для функции $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\widetilde{q}\in\mathbf{L}_1^n[a,b]$, что при любом $t\in[a,b]$ имеет место представление

$$y(t)=y(a)+\int\limits_a^t\widetilde{q}(s)ds+\sum_{k=1}^m\chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)),\tag{33}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k=1,2,\ldots,m$ удовлетворяют равенству (23). Далее, пусть функция $\varkappa\in\mathbf{L}_+^1[a,b]$ удовлетворяет при почти всех $t\in[a,b]$ оценке

$$\rho[\widetilde{q}(t),F(t,y(t))]\leqslant\varkappa(t).\tag{34}$$

Тогда из теоремы 3 и из приведенных выше рассуждений вытекает, что для любой функции $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, удовлетворяющей представлению (33) и оценке (34), и любого $\varepsilon<0$ существует такое решение x задачи (22)-(24), что для любого $t\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|x(t)-y(t)|\leq\xi(\varkappa,\varepsilon,p)(t)\tag{35}$$

и при почти всех $t\in[a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t)-\widetilde{q}(t)|\leq\varkappa(t)+\varepsilon+l(t)\xi(\varkappa,\varepsilon,p)(t),\tag{36}$$

где функция $\varkappa\in\mathbf{L}_+^1[a,b]$ удовлетворяет оценке (34), функция $l\in\mathbf{L}_+^1[a,b]$ из неравенства Липшица (25) для отображения $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\xi(\varkappa,\varepsilon,p)\in\widetilde{\mathbf{C}}_+[a,b]$ определена равенством (32) при $u = \varkappa$ и $p = |x_0 - y(a)|$. Отметим, что если импульсные воздействия отсутствуют, то приведенные оценки (35), (36) совпадают с оценками А.Ф. Филиппова не только для обыкновенных дифференциальных включений, но и для других типов включений, например, для дифференциальных включений с запаздыванием.

П р и м е р 2. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения с запаздыванием

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in F(t, x[v(t)]), \quad \text{при почти всех } \ t \in [a,b], \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если } \ \xi < a \end{aligned} \tag{37}$$

где измеримая по Лебегу функция $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ при всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству $v(t) \leqslant t$; ограниченная функция $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$ измерима по Борелю; отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ и импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяют условиям, описанным в примере 1.

Определим оператор $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}_\infty[a,b]$ равенством

$$(Px)(t) = \begin{cases} x[v(t)], & \text{если} \quad v(t) \in [a,b]; \\ \varphi[v(t)], & \text{если} \quad v(t) < a. \end{cases} \tag{38}$$

Под решением задачи (37), (23), (24) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такая суммируемая $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо включение $q(t) \in N(Px)(t)$ и при всех $t \in [a,b]$ выполняется равенство (26), где $N : \mathbf{L}_\infty[a,b] \to S(\mathbf{L}^n[a,b])$ – оператор Немыцкого, порожденный отображением $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ (см. (27)).

Определим отображение $\widetilde{\Gamma} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ равенством

$$(\widetilde{\Gamma}x)(t) = l(t)(\Theta x)(t), \tag{39}$$

где функция $l \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет условию Липшица (25) для отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ задано равенством (17).

Далее, зададим отображение $\widetilde{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_\infty[a,b]$ формулой

$$(\widetilde{P}x)(t) = \begin{cases} x[v(t)], & \text{если} \quad v(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если} \quad v(t) < a, \end{cases} \tag{40}$$

где измеримая по Лебегу функция $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ описана выше.

Из условия Липшица отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ и определений отображений $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}_\infty[a,b]$ (см. (38)), $\widetilde{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_\infty[a,b]$ (см. (40)), $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ (см. (30)), $\widetilde{\Gamma} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ (см. (39)), $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ (см. (17)) для любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ вытекают соотношения

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[NPx;\ NPy] \leqslant ||\Gamma\widetilde{P}(Z(x-y))||_{L^1(\mathcal{U})} \leqslant ||\widetilde{\Gamma}(Z(x-y))||_{L^1(\mathcal{U})}, \tag{41}$$

здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством (8).

Пусть функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, определенная при любом $t \in [a,b]$ представлением (33), при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho[\widetilde{q}(t), F(t, (Py)(t))] \leqslant \varkappa_1(t), \tag{42}$$

где отображение $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}_\infty[a,b]$ задано равенством (38), функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$ из соотношения (33), $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$.

Для задачи (37), (23), (24), в силу неравенств (41), можно рассматривать два типа мажорантных оценок.

Рассмотрим первую задачу

$$\begin{gathered}\dot{y} = \varkappa_1 + \varepsilon + \Gamma(\widetilde{P}(y)), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)),\\ k = 1, 2, \ldots, m, \quad y(a) = p,\end{gathered} \tag{43}$$

где функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (42), отображение $\widetilde{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_\infty[a,b]$ задано равенством (40), импульсные воздействия $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+,\ k = 1,2,...,m,$ имеют вид (29), числа $\varepsilon, p \geqslant 0,$ отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ определено равенством (39). Найти решение задачи (43) невозможно, поскольку отклонение аргумента (функция $v : [a,b] \to \mathbb{R}$) конкретно не задано. Однако для задачи (43) можно найти оценку, используя метод интегральных неравенств, описанный в §3. Найдем эту оценку.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\dot{y}(t) = \varkappa_1(t) + \varepsilon + l(t)(\Theta y)(t), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)),\\ k = 1, 2, \ldots, m, \quad y(a) = p,\end{gathered} \tag{44}$$

где отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ задано формулой (17), а импульсные воздействия $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+,\ k = 1,2,...,m,$ имеют вид (29), функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (42).

Решение задачи (44) при любом $t \in [a,b]$ определяется формулой

$$y(t) = p + \int\limits_a^t (\varkappa_1(s) + \varepsilon) ds + \int\limits_a^t l(s)(\Theta y)(s) ds + \sum_{k=1}^m \Delta(y(t_k))\chi_{[t_k,b)}(t). \tag{45}$$

Так как при любом $k = 1, 2, \ldots, m$ имеет место неравенство $\Delta(y(t_k)) \leqslant \Delta((\Theta y)(t_k))$, а правая часть равенства (45) не убывает, то из определения отображения $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ (см. (17)) при любом $t \in [a,b]$ вытекает оценка

$$(\Theta y)(t) \leqslant p + \int\limits_a^t (\varkappa_1(s) + \varepsilon) ds + \int\limits_a^t l(s)(\Theta y)(s) ds + \sum_{k=1}^m \Delta((\Theta y)(t_k))\chi_{[t_k,b)}(t). \tag{46}$$

Из оценки (46) и теоремы 2 следует, что значение $(\Theta y)(t)$ при любом $t \in [a,b]$ не превосходит решения задачи

$$\dot{y} = \varkappa_1 + \varepsilon + ly, \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad y(a) = p. \tag{47}$$

Решение задачи (47) найдено в примере 1, является функцией $\xi(\varkappa_1, \varepsilon, p)(\cdot)$ и определено равенством (32).

Таким образом, из теоремы 3 и приведенных примере 2 рассуждений вытекает, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, удовлетворяющей представлению (33) и оценке (42), для любого $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|x(t) - y(t)| \leq \xi(\varkappa_1, \varepsilon, p)(t) \tag{48}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leq \varkappa_1(t) + \varepsilon + l(t)\xi(\varkappa_1, \varepsilon, p)(t), \tag{49}$$

где функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (42), функция $l \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ из неравенства Липшица (25) отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\xi(\varkappa, \varepsilon, p) \in \widetilde{\mathbf{C}}_+[a,b]$ определена равенством (32) при $u = \varkappa_1$ и $p = |x_0 - y(a)|$. Отметим также, что если $v(t) = t$, то приведенные оценки (48), (49) совпадают с оценками, приведенными в примере 1 и в регулярном случае (без импульсных воздействий), с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$, совпадают с оценками А.Ф. Филиппова.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.

2. *Булгаков А. И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371-379.

3.*Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

4.*Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia. math. 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.

5.*Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

7. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

9. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter. Berlin; New-York, 2001.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 07-01-00305, № 09-01-97503), Министерства образования и науки РФ (программа Развитие научного потенциала высшей школы, проект № 2.1.1/1131), Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE (грант PRO 06/02) при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования(NUFU).

Поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.

Bulgakov A.I, Korchagina E.V., Filippova O.V. Functional-differential inclusions with impulses. Part 3. The questions of a-priori boundedness of solutions to the Cauchy problem for a functional-differential inclusion with impulses and estimates of solutions are under discussion.

Key words: functional-differential inclusion, impulses, convex-valued with respect to switching.